ملخص الوحدة الاولي تفاضل وتكامل

تذكر اشتقاق الدوال المثلثية :

(١) إذا كان : ص = ما د (سـ) فإن : $\frac{ء ص}{ء سـ}$ = دَ (سـ) مَا د (سـ)

(٢) إذا كان : ص = مَا د (سـ) فإن : $\frac{ء ص}{ء سـ}$ = - دَ (سـ) ما د (سـ)

(٣) إذا كان : ص = طا د (سـ) فإن : $\frac{ء ص}{ء سـ}$ = دَ (سـ) قَا^{٢} د (سـ)

(٤) إذا كان : ص = طَا د (سـ) فإن : $\frac{ء ص}{ء سـ}$ = - دَ (سـ) قَا^{٢} د (سـ)

(٥) إذا كان : ص = قَا د (سـ) فإن : $\frac{ء ص}{ء سـ}$ = - دَ (سـ) قَا د (سـ) طَا د (سـ)

(٦) إذا كان : ص = قَا د (سـ) فإن : $\frac{ء ص}{ء سـ}$ = دَ (سـ) قَا د (سـ) طا د (سـ)

تذكر الاشتقاق الضمنى والبارامترى :

الاشتقاق الضمنى : اشتقاق علاقة بين متغيرين (أو أكثر) بالنسبة لأحدهما دون الحاجة إلى فصل المتغيرين.

مع ملاحظة أن : $\frac{ء سـ^{ن}}{ء سـ}$ = ن سـ$^{ن-١}$ بينما $\frac{ء ص^{ن}}{ء سـ}$ = ن ص$^{ن-١}$. $\frac{ء ص}{ء سـ}$

الاشتقاق البارامترى : إذا كانت : ص = د (ل) ، سـ = ر (ل) معادلتا منحنى على الصورة البارامترية

فإن : $\frac{ء ص}{ء سـ}$ = $\frac{ء ص}{ء ل}$ × $\frac{ء ل}{ء سـ}$ = $\frac{ء ل}{ء سـ}$ ÷ $\frac{ء ص}{ء ل}$

تذكر المشتقات العليا للدالة :

المشتقات بدءًا من المشتقة الثانية للدالة تسمى بالمشتقات العليا وتكتب المشتقة من الرتبة ن بالصورة

ص$^{(ن)}$ = $\frac{ء^{ن} ص}{ء سـ^{ن}}$ حيث ن عدد صحيح موجب.

لاحظ أن :

- $\frac{ء ص}{ء سـ}$ × $\frac{ء سـ}{ء ص}$ = ١ بينما $\frac{ء^{٢} ص}{ء سـ^{٢}}$ × $\frac{ء^{٢} سـ}{ء ص^{٢}}$ ≠ ١
- $\frac{ء ص}{ء ع}$ × $\frac{ء ع}{ء سـ}$ = $\frac{ء ص}{ء سـ}$ بينما $\frac{ء^{٢} ص}{ء ع^{٢}}$ × $\frac{ء^{٢} ع}{ء سـ^{٢}}$ ≠ $\frac{ء^{٢} ص}{ء سـ^{٢}}$
- $\frac{ء}{ء سـ}$ [ص $\frac{ء ص}{ء سـ}$] = الأول × مشتقة الثانى + الثانى × مشتقة الأول = ص $\frac{ء^{٢} ص}{ء سـ^{٢}}$ + ($\frac{ء ص}{ء سـ}$)^{٢}
- معدل تغير ميل المماس للمنحنى ص = د (سـ) يساوى $\frac{ء}{ء سـ}$ ($\frac{ء ص}{ء سـ}$) = $\frac{ء^{٢} ص}{ء سـ^{٢}}$
- إذا كانت : ص = (د ○ ر) (سـ) = د (ر (سـ)) فإن : $\frac{ء ص}{ء سـ}$ = دَ (ر (سـ)) . رَ (سـ)

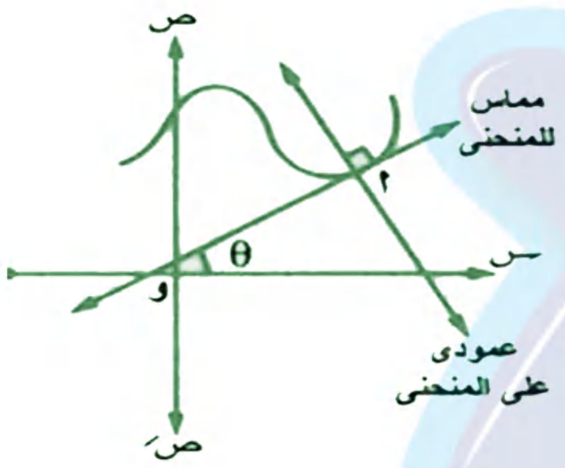
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

- إذا كان : ص = ما ٢ س فإن : $ص^{(ن)} = ٢^{ن} ما (٢ س + \frac{\pi ن}{٢})$
- إذا كان : ص = مَا ٢ س فإن : $ص^{(ن)} = ٢^{ن} مَا (٢ س + \frac{\pi ن}{٢})$
- إذا كان : ص = ما ٢ س أ، ص = مَا ٢ س فإن : $ص^{(ن)} = ٢^{ن} ص$ حيث ن عدد يقبل القسمة على ٤
- إذا كانت : ص = $س^{ن}$

فإن : ① $\frac{ء^{م} ص}{ء س^{م}} = \frac{ن!}{(ن-م)!} س^{ن-م}$ لكل ن ، م ∈ $ص^{+}$ ، ن ≥ م

② $\frac{ء^{م} ص}{ء س^{م}}$ = صفر لكل ن ، م ∈ $ص^{+}$ ، ن > م

تذكر التطبيقات على المشتقة الأولى (معادلتا المماس والعمودى لمنحنى) :



إذا كانت : ا ($س_١$ ، $ص_١$) نقطة على المنحنى ص = د (س) فإن :

① ميل المماس للمنحنى عند ا = $(\frac{ء ص}{ء س})_{(س_١ ، ص_١)}$

② ميل العمودى للمنحنى عند ا = $\frac{-١}{(\frac{ء ص}{ء س})_{(س_١ ، ص_١)}}$

③ معادلة المماس عند ا : ص − $ص_١$ = م (س − $س_١$) ومعادلة العمودى : ص − $ص_١$ = $\frac{-١}{م}$ (س − $س_١$)

«حيث م هو ميل المماس للمنحنى عند النقطة ا»

④ ظل الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند ا : ظا θ = $(\frac{ء ص}{ء س})_{(س_١ ، ص_١)}$

تذكر المعدلات الزمنية المرتبطة :

إذا كان لدينا علاقة بين عدة متغيرات س ، ص ، ع فإن اشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن (ن) يعطى

علاقة بين المعدلات الزمنية لهذه المتغيرات : $\frac{ء س}{ء ن}$ ، $\frac{ء ص}{ء ن}$ ، $\frac{ء ع}{ء ن}$

إذا كانت : $س_{.}$ هى قيمة المتغير س عند (ن = ٠) ، س قيمة المتغير عند زمن (ن) فإن : س = $س_{.}$ + $\frac{ء س}{ء ن}$ × ن

إذا كان المتغير س
- يتزايد/يبتعد/يتمدد/يُصب/يتراكم ← بتزايد الزمن ← موجبًا
- يتناقص/يقترب/ينكمش/يتسرب/ينصهر ← فإن $\frac{ء س}{ء ن}$ يكون ← سالبًا

ملخص الوحدة الاولي تفاضل وتكامل

تذكر العدد النيبيرى (هـ) :

• $هـ = ١ + \frac{١}{\lfloor ١} + \frac{١}{\lfloor ٢} + \frac{١}{\lfloor ٣} + \cdots = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{١}{\lfloor ن}$

تذكر اشتقاق الدوال الأسية واللوغاريتمية :

① • إذا كانت : ص = $هـ^{س}$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س} = هـ^{س}$

• إذا كانت : ص = $ا^{س}$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س} = ا^{س} \text{ لو}_{هـ} ا$

الدالة الأسية.

وبصفة عامة : • إذا كانت : ص = $هـ^{د(س)}$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س} = د'(س) \times هـ^{د(س)}$

• إذا كانت : ص = $ا^{د(س)}$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س} = د'(س) \times ا^{د(س)} \text{ لو}_{هـ} ا$

② • إذا كانت : ص = $\text{لو}_{هـ} س$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{س}$

• إذا كانت : ص = $\text{لو}_{ا} س$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{س} \times \text{لو}_{ا} هـ$

الدالة اللوغاريتمية.

وبصفة عامة : • إذا كانت : ص = $\text{لو}_{هـ} د(س)$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{د'(س)}{د(س)}$

• إذا كانت : ص = $\text{لو}_{ا} د(س)$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{د'(س)}{د(س)} \times \text{لو}_{ا} هـ$

لاحظ أن : • إذا كانت : ص = $\text{لو}_{هـ} |د(س)|$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{د'(س)}{د(س)}$

• إذا كانت : ص = $\text{لو}_{ا} |د(س)|$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{د'(س)}{د(س)} \text{ لو}_{ا} هـ$

• **الاشتقاق اللوغاريتمى :**

إذا كانت : ص = $(د(س))^{ر(س)}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفيها قبل الاشتقاق.

∴ $\text{لو}_{هـ}(ص) = ر(س) \text{ لو}_{هـ} د(س)$ ∴ $\frac{١}{ص} \times \frac{ء ص}{ء س} = ر'(س) \text{ لو}_{هـ} د(س) + ر(س) \times \frac{د'(س)}{د(س)}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملخص الوحدة الثانية تفاضل

تذكر النقط الحرجة للدالة :

الدالة د المتصلة فى الفترة]أ ، ب[لها نقطة حرجة (حـ ، د (حـ)) إذا كانت حـ ∈]أ ، ب[، دَ (حـ) = ٠ أو دَ (حـ) غير موجودة.

تذكر تزايد وتناقص الدوال :

لبحث إطراد الدالة :

(١) نوجد النقط الحرجة للدالة والتى عندها دَ (س) = صفر أو غير موجودة.

(٢) نحدد الفترات التى ينقسم إليها المجال بالإحداثيات السينية للنقط الحرجة فتكون :

- الدالة د متزايدة فى الفترة التى فيها دَ (س) > ٠
- الدالة د متناقصة فى الفترة التى فيها دَ (س) < ٠

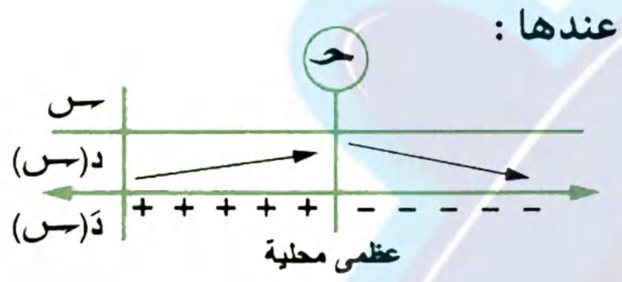
تذكر القيم العظمى والصغرى المحلية للدوال المتصلة الغير مشتملة على دالة ثابتة :

النقطة الحرجة (حـ ، د (حـ)) للدالة د المتصلة عند س = حـ فى فترة مفتوحة حول حـ يكون عندها :

- قيمة عظمى محلية للدالة :

إذا تغيرت إشارة دَ (س) حول حـ من موجب إلى سالب

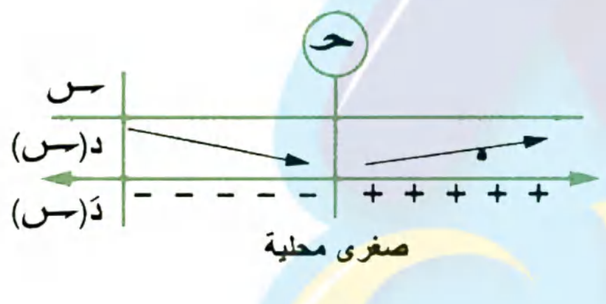
أو إذا كانت دً (حـ) < ٠



- قيمة صغرى محلية للدالة :

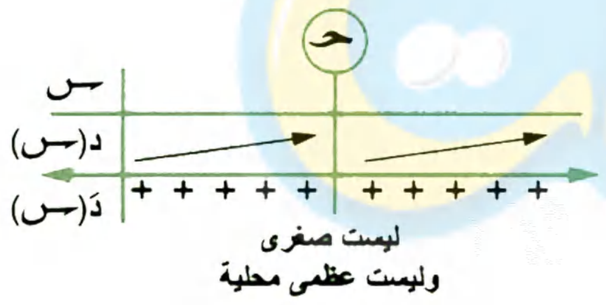
إذا تغيرت إشارة دَ (س) حول حـ من سالب إلى موجب

أو إذا كانت دً (حـ) > ٠



لاحظ أن :

(١) ليس بالضرورة وجود قيمة عظمى أو صغرى محلية عند النقطة الحرجة ويحدث ذلك إذا لم تتغير إشارة دَ (س) حول حـ



(٢) إذا كانت دً (حـ) = صفر فإن المشتقة الثانية لاتصلح لتحديد نوع النقطة هل عظمى أم صغرى محلية.

(٣) الدالة كثيرة الحدود من الدرجة نـ بها (نـ - ١) على الأكثر من القيم العظمى أو الصغرى المحلية.

(٤) النقط الحرجة التى عندها المشتقة الأولى = صفر أى عندها مماس أفقى يطلق عليها أحيانًا نقط التوقف

تذكر القيم القصوى (العظمى والصغرى المطلقة) لدالة على فترة مغلقة :

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة [أ ، ب] فإنه لإيجاد أكبر قيمة وأقل قيمة للدالة :

(١) نعين النقط الحرجة التى عندها دَ (س) = صفر أو غير موجودة والتى فى الفترة [أ ، ب]

(٢) نوجد قيمة الدالة عند كل من النقط الحرجة وعند النقط الحدية أى د (أ) ، د (ب)

(٣) نقارن بين القيم السابقة كلها فتكون أكبر هذه القيم هى القيمة العظمى المطلقة فى [أ ، ب] ، أصغر هذه القيم هى القيمة الصغرى المطلقة فى [أ ، ب]

ملخص الوحدة الثانية تفاضل

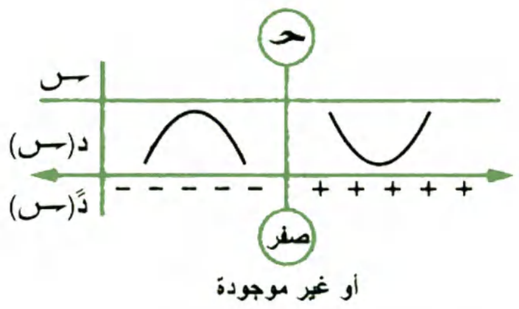
تذكر التحدب لأعلى والتحدب لأسفل ونقط الانقلاب :

* المنحنى الذى يقع أسفل جميع مماساته يكون محدبًا لأعلى
* المنحنى الذى يقع أعلى جميع مماساته يكون محدبًا لأسفل
* لتحديد مناطق التحدب لأعلى ومناطق التحدب لأسفل ونقط الانقلاب

(١) نوجد قيمة س التى تجعل د$'$ (س) = صفر أو غير موجودة.

(٢) نعين إشارة د$'$ (س) فى الفترة التى ينقسم إليها مجال الدالة بقيم س السابقة فإذا كانت :

- د$'$ (س) < ٠ فإن المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة.
- د$'$ (س) > ٠ فإن المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة.



(٣) النقطة (حـ ، د (حـ)) التى تفصل بين مناطق التحدب لأعلى ومناطق التحدب لأسفل (أى التى عندها تتغير إشارة د$'$ (س) حول (س = حـ) تكون نقطة انقلاب للدالة بشرط وجود مماس وحيد للدالة عند هذه النقطة.

تذكر رسم منحنيات الدوال كثيرات الحدود :

لرسم منحنيات الدوال كثيرات الحدود نتبع الآتى :

(١) نحدد تماثل الدالة فإذا كانت :

د (- س) = د (س) لكل س ، - س ∈ مجال د فإن المنحنى يمثل دالة زوجية (متماثل حول محور الصادات)

د (- س) = - د (س) لكل س ، - س ∈ مجال د فإن المنحنى يمثل دالة فردية (متماثل حول نقطة الأصل)

(٢) دراسة تغيرات الدالة وتحديد فترات التزايد والتناقص ونقط القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت.

(٣) تحديد فترات التحدب لأعلى ولأسفل ونقط الانقلاب إن وجدت.

(٤) إيجاد نقط تقاطع منحنى الدالة مع محورى الإحداثيات إن أمكن ذلك ونقط أخرى مساعدة.

(٥) إعداد جدول نرتب فيه النقط التى حصلنا عليها سابقًا ونمثلها بيانيًا مع الأخذ فى الاعتبار ما يلى :

إشارات دَ (س) ، د$'$ (س)	خواص منحنى الدالة د	شكل المنحنى
دَ (س) > ٠ ، د$'$ (س) > ٠	متزايد ، محدب لأسفل	
دَ (س) > ٠ ، د$'$ (س) < ٠	متزايد ، محدب لأعلى	
دَ (س) < ٠ ، د$'$ (س) > ٠	متناقص ، محدب لأسفل	
دَ (س) < ٠ ، د$'$ (س) < ٠	متناقص ، محدب لأعلى	

تذكر التطبيقات على القيم العظمى والصغرى :

لحل مسائل التطبيقات نعبر عن المتغير المراد إيجاد أكبر أو أقل قيمة له كدالة فى متغير واحد وذلك بالاستعانة بمعطيات المسألة ثم نوجد القيم العظمى أو الصغرى لهذه الدالة.

أ/ محمود رجب
01227742878

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي
D.M.RAZK

ملخص الوحدة الثالثة تكامل

التكامل غير المحدد

* التكاملات الأساسية (القياسية) :

(١) $\int هـ^{س}\ ء س = هـ^{س} + ث$

(٢) $\int هـ^{ك س + ب}\ ء س = \frac{هـ^{ك س + ب}}{ك} + ث$

(٣) $\int ا^{س}\ ء س = \frac{ا^{س}}{\text{لو}_{هـ} ا} + ث$

(٤) $\int ا^{ك س + ب}\ ء س = \frac{ا^{ك س + ب}}{ك\ \text{لو}_{هـ} ا} + ث$

(٥) $\int \frac{١}{س}\ ء س = \text{لو}_{هـ} |س| + ث$

* أهم قواعد التكامل :

(١) $\int هـ^{د(س)}\ د'(س)\ ء س = هـ^{د(س)} + ث$

(٢) $\int ا^{د(س)}\ د'(س)\ ء س = \frac{ا^{د(س)}}{\text{لو}_{هـ} ا} + ث$

(٣) $\int \frac{د'(س)}{د(س)}\ ء س = \text{لو}_{هـ} |د(س)| + ث$

(٤) $\int هـ^{س}\ [د'(س) + د(س)]\ ء س = هـ^{س}\ د(س) + ث$

(٥) $\int هـ^{-س}\ [د'(س) - د(س)]\ ء س = هـ^{-س}\ د(س) + ث$

تذكر أن

(١) $\int ط\ا س\ ء س = \int \frac{ما س}{مَا س}\ ء س = -\int \frac{(-ما س)}{مَا س}\ ء س$ «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

$= \boxed{-\text{لو}_{هـ} |مَا س| + ث} = \boxed{\text{لو}_{هـ} |\frac{١}{مَا س}| + ث}$

(٢) $\int طَا س\ ء س = \int \frac{مَا س}{ما س}\ ء س$ «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

$= \boxed{\text{لو}_{هـ} |ما س| + ث}$

(٣) $\int قَا س\ ء س = \int \frac{قَا س\ (قَا س + طا س)}{(قَا س + طا س)}\ ء س$ «بالضرب بسطًا ومقامًا فى (قَا س + طا س)»

$= \int \frac{قَا س\ طا س + قَا^{٢} س}{(قَا س + طا س)}\ ء س$ «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

$= \boxed{\text{لو}_{هـ} |قَا س + طا س| + ث}$

(٤) $\int قَا س\ ء س = \int \frac{قَا س\ (قَا س + طَا س)}{قَا س + طَا س}\ ء س$ «بالضرب بسطًا ومقامًا فى (قَا س + طَا س)»

$= \int \frac{قَا س\ طَا س + قَا^{٢} س}{قَا س + طَا س}\ ء س$

$= -\int \frac{-قَا س\ طَا س - قَا^{٢} س}{قَا س + طَا س}\ ء س$ «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

$= \boxed{-\text{لو}_{هـ} |قَا س + طَا س| + ث}$

ملخص الوحدة الثالثة تكامل

* طرق التكامل :

① التكامل بالتعويض :

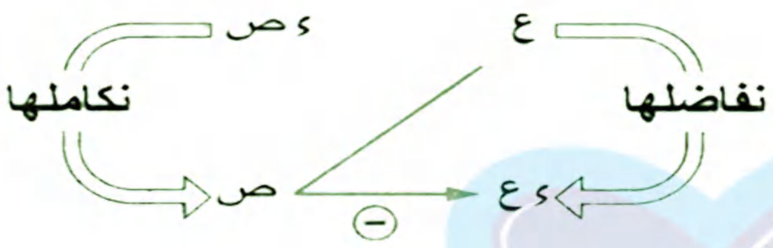
* إذا كان التكامل المعطى على الصورة $\int$ د (ر (س)) ر$'$ (س) ء س نستخدم التعويض $\boxed{\text{ر (س)} = \text{ع}}$

* إذا احتوى التكامل المعطى على الجذر النونى لدالة أى $\sqrt[ن]{\text{ر (س)}}$ نستخدم التعويض :

$\boxed{\text{ر (س)} = \text{ع}^{ن}}$ أ، $\boxed{\text{ر (س)} = \text{ع}}$

* فى بعض المسائل نستخدم تعويضًا معينًا مناسبًا لها حتى يتم تبسيط التكامل وكتابته على الصورة القياسية.

② التكامل بالتجزئ :



$\therefore \boxed{\int \text{ع ء ص} = \text{ص ع} - \int \text{ص ء ع}}$

التكامل المحدد

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] وكانت ت أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة

فإن : $\boxed{\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د (س) ء س} = \text{ت (ب)} - \text{ت (أ)}}$

* خواص التكامل المحدد :

① إذا كانت د دالة متصلة على [أ ، ب] ، حـ $\in$]أ ، ب[فإن :

(١) $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د (س) ء س} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د (س) ء س}$ (٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د (س) ء س} =$ صفر

(٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د (س) ء س} = \int_{\text{أ}}^{\text{حـ}} \text{د (س) ء س} + \int_{\text{حـ}}^{\text{ب}} \text{د (س) ء س}$

② إذا كانت الدالة د متصلة وفردية على الفترة [− أ ، أ]

فإن : $\boxed{\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د (س) ء س} =}$ صفر

③ إذا كانت الدالة د متصلة وزوجية على الفترة [− أ ، أ]

فإن : $\boxed{\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د (س) ء س} = ٢ \int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د (س) ء س}}$

④ إذا كانت : د ، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ ، ب] فإن :

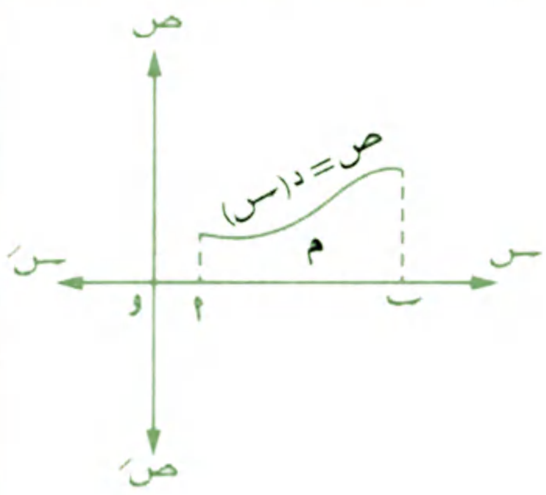
(١) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د (س)} \pm \text{ر (س)}] \text{ء س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د (س) ء س} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ر (س) ء س}$

(٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك . د (س) ء س} = \text{ك} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د (س) ء س}$ حيث ك $\in$ ح

ملخص الوحدة الثالثة تكامل

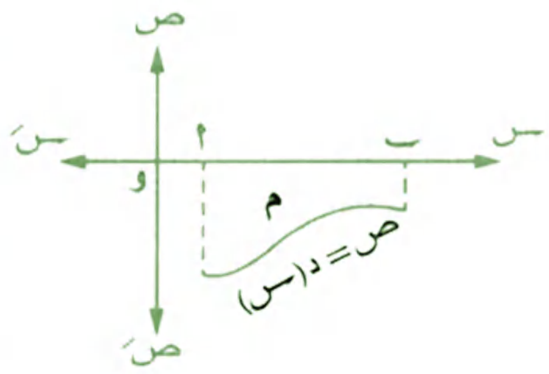
مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات فى الفترة [أ ، ب]

المنطقة فوق محور السينات



م = $\int_{أ}^{ب}$ د (س) ء س

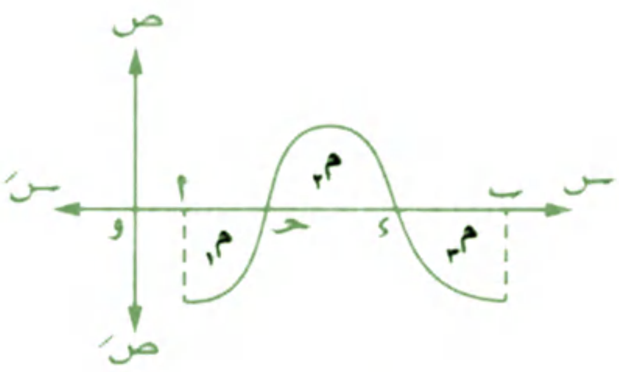
المنطقة تحت محور السينات



م = − $\int_{أ}^{ب}$ د (س) ء س

= | $\int_{أ}^{ب}$ د (س) ء س |

المنطقة مقسمة (فوق / تحت) محور السينات



م = | $\int_{أ}^{حـ}$ د (س) ء س | + | $\int_{ء}^{ب}$ د (س) ء س |

+ | $\int_{ء}^{ب}$ د (س) ء س | = | $\int_{أ}^{ب}$ د (س) ء س |

ملاحظات

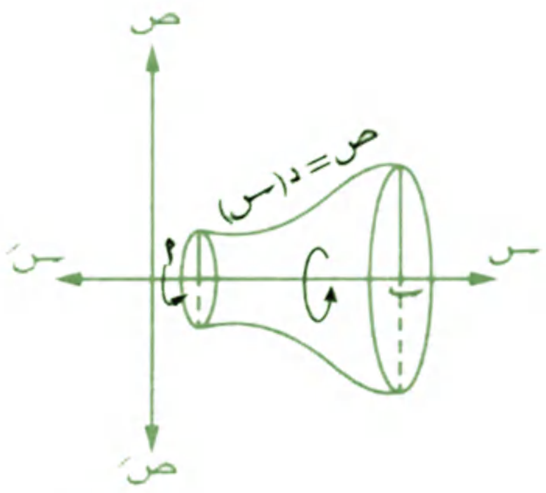
(١) يفضل الاستعانة برسم منحنى الدالة المعطاة لتحديد المناطق التى تقع فوق أو تحت محور السينات.

(٢) نظرًا لصعوبة رسم كثير من المسائل بيانيًا فيفضل إيجاد أصفار الدالة
(حتى إذا علم حدود التكامل) والتى تجزئ مجال الدالة [أ ، ب] إن وجدت إلى فترات جزئية ثم نحدد إشارة الدالة فى كل فترة جزئية ومنها يتم تحديد المناطق التى تقع فوق أو تحت محور السينات.

(٣) قيمة التكامل المحدد قد تكون موجبة أو سالبة أما المساحة تكون دائمًا موجبة.

(٤) بصفة عامة مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى أى دالة متصلة : ص = د (س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب هى : م = $\int_{أ}^{ب}$ | د (س) | ء س

حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور السينات



ح = $\pi \int_{أ}^{ب}$ ص^{٢} ء س

= $\pi \int_{أ}^{ب}$ [د (س)]^{٢} ء س

موقع الدكتور محمد رزق التعليمي

امسح الباركود بالموبيل لتثبيت التطبيق وتحميل كل الملازم مجانا وبسرعه

MR

حمل التطبيق الأن

GET IT ON Google Play

ملازم ابتدائي | ملازم اعدادي | ملازم ثانـــوي | كورسات ونتائج امتحانات

موقع الدكتور محمد رزق
Dr.MoRizK